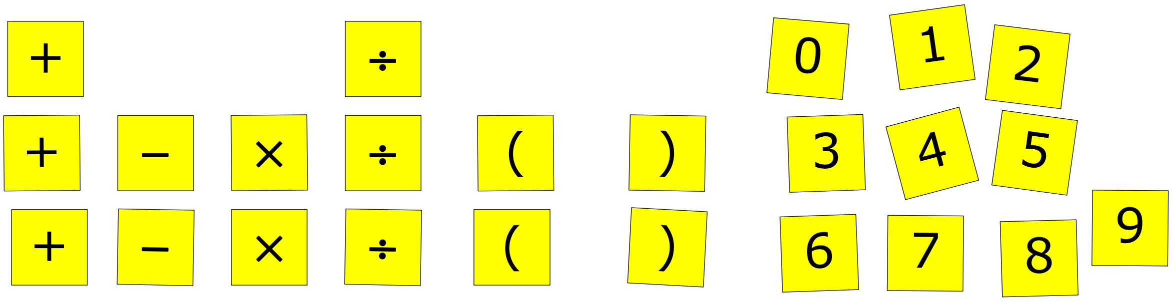
Ergänzung zur Beispielaufgabe ‚vier aufeinanderfolgende Zahlen' (Leitfaden S. 43)

Als Ergänzung zur Beispielaufgabe **‚vier aufeinanderfolgende Zahlen'** stellen wir eine ausgearbeitete Version der bekannten Aufgabe ‚vier Vieren' zur Verfügung. Der Herausgeber, MA-THEMA, hat als Ziel die Förderung des Interesses an Mathematik und die Begabtenförderung. Dennoch ist der Einstieg der Aufgaben allen Lernenden zugänglich - jeder kann versuchen, Terme aus vier Vieren aufzustellen und ihren Wert unter Beachtung der Vorrangregeln zu berechnen. Auf den höheren Anforderungsebenen ist das Ziel das Beschreiben und Untersuchen sowie das gezielte Verändern von Termen. Die vorliegende MA-THEMA-Aufgabe reizt das Potential der Fragestellung aus – so weit wird man im regulären Unterricht kaum kommen – und stellt in der ausgearbeiteten Musterlösung den Lehrkräften die Zusammenhänge vollständig und systematisch dar. Die beiden Teilaufgaben **a)** und **b)** besitzen bereits die Merkmale einer kleinen Lernumgebung. Die Teilaufgaben **b)** und **c)** zeigen, wie im Rahmen dieser Lernumgebung inklusive Begabtenförderung realisierbar ist.

Beispielaufgabe ‚vier Vieren'

Du hast vier Vieren zur Verfügung, außerdem Rechenzeichen sowie Klammern**.**

$$4 \times (4 - 4 \div 4) = 12$$



Alle vier Vieren müssen verwendet werden.

Stelle einen Term auf, der den Wert 0 hat.

Oben siehst Du ein Beispiel, wie mit dem man das Ergebnis 12 erhält. Stelle Terme auf, die den Wert 1, den Wert 2 usw. bis zum Wert 9 haben.

Lösungen zur Beispielaufgabe ‚vier Vieren'

Die ersten 10 Zahlen 0 bis 9 lassen sich durch Terme darstellen, die ausschließlich die Zahl Vier viermal enthalten und mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und : sowie ggf. Klammern formuliert sind. Häufig gibt es zwei oder mehr unterschiedliche Terme mit dem gleichen Ergebnis. Als nicht grundsätzlich verschieden angesehen werden z.B. reine Vertauschungen nach dem Kommutativgesetz wie $(4+4\cdot 4):4=(4\cdot 4+4):4$. Nach diesem Bewertungsmaßstab gibt es für die Ergebnisse 4, 5, 6 und 9 im Prinzip nur eine Formulierungsmöglichkeit.

0 $= 4+4-4-4$ $= 4+4-(4+4)$ $= 4\cdot 4-4\cdot 4$ $= 4:4-4:4$ $= (4\cdot 4):4-4$ $= (4+4)\cdot(4-4)$ **Prinzip:** $a-a$ oder $0\cdot a$	**1** $= 4:4+4-4$ $= (4\cdot 4):(4\cdot 4)$ $= (4:4)\cdot(4:4)$ $= (4+4-4):4$ **Prinzip:** $a : a$ oder **Idee:** 1 + 0	**2** $= 4:4+4:4$ $= (4\cdot 4):(4+4)$ **Prinzip:** $a : a + a : a$ oder **Idee:** 16 : 8
3 $= (4+4+4):4$ $= (4\cdot 4-4):4$ **Prinzip:** $= (3\cdot a) : a$	**4** $= (4-4)\cdot 4+4$ **Idee:** 4 + 0	**5** $= (4\cdot 4+4):4$ **Idee:** 20 : 4
6 $= (4+4):4+4$ **Idee:** 2 + 4	**7** $= 4+4-4:4$ $= -4:4+4+4$ (mit Vorzeichen) **Idee:** 8 – 1	**8** $= 4+4+4-4$ $= 4\cdot 4-4-4$ $= (4+4):4\cdot 4$ **Idee:** 12 – 4 oder $8\cdot 1$
9 $= 4:4+4+4$ **Idee:** 8 + 1		

Anmerkungen: Die Ergebnisse 10 und 11 lassen sich nicht als Term aus vier Vieren nach den vorgegebenen Regeln darstellen. Erst für die 12 gibt es wieder eine Darstellung, die einzige übrigens.

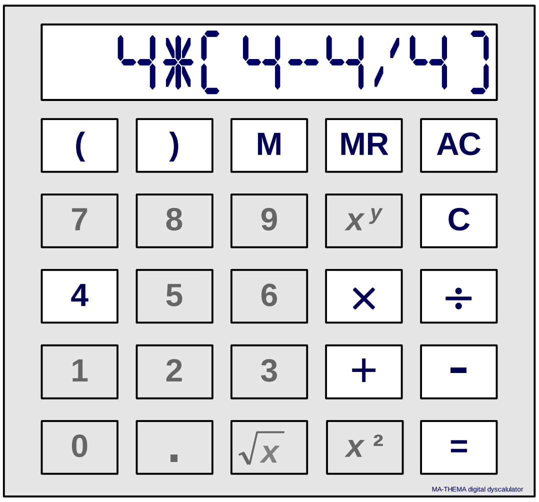
Auf den folgenden drei Seiten finden Sie Druckvorlagen für Ziffern und Rechenzeichen – ein universell einsetzbares Material. Diese Seiten auf gelbes Papier drucken, laminieren, ausschneiden und auf der Rückseite mit Magnetfolie bekleben.

1	2	3	4
5	6	7	8
9	+	=	0
1	2	3	4
5	6	7	8

9	4	4	4
4	+	+	+
−	−	−	×
×	×	:	:
:	=	(	(

)	)	)	)
,	,	,	,

Vier Vieren, vier Zweien und lückenlos aufeinanderfolgende Ergebnisse



a) Die Zahlen 0 bis 9 sollen durch Terme dargestellt werden, die ausschließlich aus vier Vieren bestehen. Es können die vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ sowie Klammern verwendet werden.

Beispiel: Der Term $4 \cdot (4 - 4 : 4)$ entspricht den vorgegebenen Regeln und stellt die Zahl 12 dar.

b) Untersuche, für wie viele lückenlos aufeinander folgende ganze Zahlen von 0 an es ähnliche Darstellungen durch Terme aus vier Zweien gibt.

c) Mit vier Zwölfen endet die Suche schnell. Zeige, dass die 0 und die ersten positiven ganzen Zahlen sich immer durch Terme darstellen lassen, die ausschließlich die gleiche Zahl a viermal enthalten und mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ sowie ggf. Klammern formuliert sind. Der Term soll den geforderten Wert unabhängig von der gewählten Zahl a besitzen.

Erkläre an Beispielen, wie die nächste positive ganze Zahl (die erste nicht immer darstellbare) durch spezielle Werte von a dennoch zustande kommt.

Untersuche, mit welcher Zahl a man „am weitesten kommt“, d.h. mit welchem a sich die meisten positiven ganzen Zahlen von 0 an lückenlos als Term aus vier gleichen Zahlen a darstellen lassen.

d) Führe die gleichen Untersuchungen wie in **c)** für Terme aus fünf gleichen Zahlen a durch.

Formuliere eine Regel für Terme aus sechs und mehr gleichen Zahlen a und begründe oder beweise sie.

Quelle: MA-THEMA; Autor: Helmut Mallas

Lösungen:

a) Die ersten 10 Zahlen 0 bis 9 lassen sich durch Terme darstellen, die ausschließlich die Zahl Vier viermal enthalten und mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ sowie ggf. Klammern formuliert sind. Häufig gibt es zwei oder mehr unterschiedliche Terme mit dem gleichen Ergebnis. Als nicht grundsätzlich verschieden angesehen werden z.B. reine Vertauschungen nach dem Kommutativgesetz wie $(4+4\cdot 4):4=(4\cdot 4+4):4$. Nach diesem Bewertungsmaßstab gibt es für die Ergebnisse 4, 5, 6 und 9 im Prinzip nur eine Formulierungsmöglichkeit.

0 $= 4+4-4-4$ $= 4+4-(4+4)$ $= 4\cdot 4-4\cdot 4$ $= 4:4-4:4$ $= (4\cdot 4):4-4$	**1** $= 4:4+4-4$ $= (4\cdot 4):(4\cdot 4)$ $= (4:4)\cdot(4:4)$ $= (4+4-4):4$	**2** $= 4:4+4:4$ $= (4\cdot 4):(4+4)$
3 $= (4+4+4):4$ $= (4\cdot 4-4):4$	**4** $= (4-4)\cdot 4+4$	**5** $= (4\cdot 4+4):4$
6 $= (4+4):4+4$	**7** $= 4+4-4:4$ $= -4:4+4+4$ (mit Vorzeichen)	**8** $= 4+4+4-4$ $= 4\cdot 4-4-4$ $= (4+4):4\cdot 4$
9 $= 4:4+4+4$		

Anmerkungen: Die Ergebnisse 10 und 11 lassen sich nicht als Term aus vier Vieren nach den vorgegebenen Regeln darstellen. Erst für die 12 gibt es wieder eine Darstellung, die einzige übrigens.

Während man für die 12 durch Angabe des Terms $4\cdot(4-4:4)$ einen Existenzbeweis geführt hat, ist ein Nichtexistenzbeweis schwieriger. „Ich habe keinen Term gefunden" darf man sich eingestehen, aber es ist nicht zwangsläufig gleichbedeutend mit der Aussage „Man kann keinen Term finden!" – vielleicht kann jemand anders es ja doch. Hier aber ist die Aussage „Es gibt nach den vorgegebenen Regeln keinen Term mit dem Wert 10" keine unbegründete Behauptung, denn die Musterlösung basiert auf der Auswertung aller Terme aus vier Vieren. Das ist durchführbar, weil es nicht unendlich viele sind; wir verzichten aus Platzgründen jedoch auf eine Aufzählung aller Terme. Deren Anzahl kann man folgendermaßen abschätzen: Zwischen den vier Vieren stehen drei Rechenzeichen, von denen es je vier gibt. Es sind also $4\cdot 4\cdot 4=64$ Rechenzeichenkombinationen zu prüfen. In einem viergliedrigen Term lassen sich auf vier verschiedene Arten Klammern setzen, das ergibt ca. 256 Terme. Warum nicht genau 256? In 13 Termen wird durch eine Klammer dividiert, die als Differenz zweier gleicher Zahlen 0 ergibt, diese Terme sind nicht definiert.

b) Die ersten 7 Zahlen 0 bis 6 lassen sich durch Terme darstellen, die ausschließlich die Zahl Zwei viermal enthalten und mit den vier Grundrechenarten $+$, $-$, $\cdot$ und $:$ sowie ggf. Klammern formuliert sind. Zu allen Ergebnissen gibt es mindestens zwei unterschiedliche Terme. Für die 7 gibt es keine Darstellung, siehe Anmerkung zu **a)**, sondern erst wieder für die 8, die 10, die 12 und die 16.

0 $= 2 + 2 - 2 - 2$ $= 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2$ $= 2 : 2 - 2 : 2$ $= 2 + 2 - 2 \cdot 2$ $\vdots$ $= 2 \cdot 2 - (2 + 2)$ $= (2 + 2) \cdot (2 - 2)$ $= 2 : (2 : 2) - 2$	**1** $= (2 + 2) : (2 + 2)$ $= (2 \cdot 2) : (2 \cdot 2)$ $= (2 : 2) : (2 : 2)$ $= (2 + 2) : (2 \cdot 2)$ $= (2 \cdot 2) : (2 + 2)$ $= 2 : (2 : (2 : 2))$ $= ((2 : 2) : 2) \cdot 2$ $= ((2 + 2) - 2) : 2$ $= ((2 + 2) : 2) : 2$ $= (2 : 2) - (2 - 2)$	**2** $= 2 : 2 + 2 : 2$ $= 2 + (2 - 2) \cdot 2$ $= 2 + (2 - 2) : 2$ $= 2 - (2 - 2) \cdot 2$ $= 2 - (2 - 2) : 2$
3 $= 2 \cdot 2 - 2 : 2$ $= 2 + 2 - 2 : 2$ $= (2 + 2 + 2) : 2$ $= (2 \cdot 2 + 2) : 2$	**4** $= (2 + 2) + (2 - 2)$ $= 2 \cdot 2 + (2 - 2)$ $= 2 + (2 + 2) : 2$ $= ((2 + 2) \cdot 2) : 2$ $= (2 \cdot 2) \cdot (2 : 2)$	**5** $= 2 \cdot 2 + 2 : 2$ $= 2 + 2 + 2 : 2$
6 $= (2 + 2) \cdot 2 - 2$ $= 2 \cdot 2 \cdot 2 - 2$ $= (2 : 2 + 2) \cdot 2$		

c) Mit der Zahl 12 gelingen nur Darstellungen der 4 Ergebnisse 0 bis 3 mit Termen wie $\mathbf{0} = (12+12)-(12+12)$, $\mathbf{1} = (12+12):(12+12)$, $\mathbf{2} = (12:12)+(12:12)$ und $\mathbf{3} = (12+12+12):12$. Unabhängig von der konkreten Zahl a kann man Terme mit dem Wert 0, dem Wert 1, dem Wert 2 und mit dem Wert 3 immer aus vier gleichen Zahlen a bilden. Dabei muss nur $a \neq 0$ gefordert werden. **Nachweise:**

Die *Grundidee für die* **0** ist es, Gleiches voneinander zu subtrahieren, also z.B. $(a+a)-(a+a)=0$ oder $(a \cdot a)-(a \cdot a)=0$. Wichtig ist eine weitere Formulierung des Terms, die auf der Multiplikation mit 0 basiert. Die sicherste

Variante ist $(a-a)\cdot(a-a)=0$. In einer der beiden Klammern darf aber auch eine Summe stehen: $(a-a)\cdot(a+a)=0$. In dieser Klammer könnte man beliebig viele weitere Summanden unterbringen.

Die *Grundidee für die* **1** ist, Gleiches durcheinander zu dividieren, also z.B. $(a+a):(a+a)=1$ oder $(a\cdot a):(a\cdot a)=1$. Dabei darf die zweite Klammer nicht 0 werden, d.h. das Minuszeichen ist nicht erlaubt. Eine wichtige Alternative ist $a:a+(a-a)=1$, denn mit der 0 im zweiten Summanden könnte man eine Klammer mit beliebig viele weiteren Summanden multiplizieren.

Grundidee für die **2** ist, zwei Einsen zu addieren, also $(a:a)+(a:a)=1+1=2$. Hier gibt es, von speziellen Werten der Zahl *a* abgesehen, nur eine Möglichkeit.

Grundidee für die **3** ist, die Summe aus drei gleichen Summanden durch diesen Summanden zu dividieren, also $(a+a+a):a=(3\cdot a):a=3$. Auch hier gibt es, von speziellen Werten der Zahl *a* abgesehen, nur eine Möglichkeit.

4 ist die erste Zahl, die sich nur bei speziellen Werten der Zahl *a* als Term aus vier gleichen Zahlen darstellen lässt. In der Tabelle sind Beispiele aufgeführt.

a	Terme mit dem Wert **4** aus vier *a*’s	Ursache bei diesem speziellen Wert *a*
2	$2\cdot 2+(2-2)=4+0=4$ oder $(2+2)\cdot(2:2)=4\cdot 1=4$	$2+2=2\cdot 2=4$
3	$(3\cdot 3+3):3=12:3=4$	$3\cdot 3+3=3\cdot(3+1)=3\cdot 4$. 3 und 4 sind Nachbarzahlen.
4	$4+(4-4)\cdot 4=4+0=4$	$a=4$
5	$(5\cdot 5-5):5=20:5=4$	$5\cdot 5-5=5\cdot(5-1)=5\cdot 4$. 5 und 4 sind Nachbarzahlen.
6	$6-(6+6):6=6-12:6=6-2=4$	2 ist mit drei gleichen Zahlen darstellbar, aus der vierten 6 wird $6-2=4$.
7	Es gibt keine Darstellung.	4 und 7 sind keine Nachbarzahlen.
8	$(8\cdot 8):(8+8)=64:16=4$	2 ist mit drei gleichen Zahlen darstellbar, aus der vierten 8 wird $8:2=4$.
9	Es gibt keine Darstellung.	4 und 9 sind keine Nachbarzahlen.
10	Es gibt keine Darstellung.	Aus $(10+10):10$ ist nur eine 2 darstellbar, aber keine 4.
⋮	Es gibt keine Darstellung.	Keiner der genannten Bezüge zur 4 existiert.

Die nächste Tabelle gibt für kleine Zahlen *a* an, für wie viele von 0 an lückenlos aufeinander folgende Zahlen Darstellungen als Term aus vier gleichen Zahlen *a* existieren. Nicht die Zahl 4 gewinnt, sondern die meisten Darstellungen sind mit der Zahl a = 3 möglich. Es wurde bereits gezeigt, dass Darstellungen für die Werte 0, 1, 2 und 3 immer existieren, d.h. die Anzahl 4 ist die Mindestzahl.

Zahl a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	…
Anzahl	**5**	**7**	**11**	**10**	**8**	**9**	4	**5**	4	4	4	4	4	4	…

Die Ursache für die erstaunlich große Anzahl von Darstellungen kleiner Zahlen erkennt man besser, wenn man sich die Struktur ausgewählter Terme ansieht.

0 $= 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1$ **1** $= 1 - 1 \cdot 1 + 1$ **2** $= (1 + 1) + (1 - 1)$ **3** $= (1 + 1) + 1 : 1$ **4** $= 1 + 1 + 1 + 1$	**0** $= 2 + 2 - 2 \cdot 2$ **1** $= (2 + 2 - 2) : 2$ **2** $= 2 + (2 - 2) \cdot 2$ **3** $= (2 + 2 + 2) : 2$ **4** $= (2 + 2) + (2 - 2)$ **5** $= (2 + 2) + 2 : 2$ **6** $= (2 + 2) \cdot 2 - 2$	**0** $= (3 + 3) - (3 + 3)$ **1** $= (3 + 3 - 3) : 3$ **2** $= (3 \cdot 3 - 3) : 3$ **3** $= 3 \cdot 3 - (3 + 3)$ **4** $= (3 \cdot 3 + 3) : 3$ **5** $= 3 + 3 - 3 : 3$ **6** $= 3 + 3 - (3 - 3)$ **7** $= 3 + 3 + 3 : 3$ **8** $= 3 \cdot 3 - 3 : 3$ **9** $= 3 \cdot 3 - (3 - 3)$ **10** $= 3 \cdot 3 + 3 : 3$
0 $= 4 + 4 - 4 - 4$ **1** $= 4 : 4 + 4 - 4$ **2** $= 4 : 4 + 4 : 4$ **3** $= (4 + 4 + 4) : 4$ **4** $= (4 - 4) \cdot 4 + 4$ **5** $= (4 \cdot 4 + 4) : 4$ **6** $= (4 + 4) : 4 + 4$ **7** $= 4 + 4 - 4 : 4$ **8** $= 4 + 4 + 4 - 4$ **9** $= 4 : 4 + 4 + 4$	**0** $= (5 + 5) \cdot (5 - 5)$ **1** $= (5 + 5 - 5) : 5$ **2** $= 5 : 5 + 5 : 5$ **3** $= (5 + 5 + 5) : 5$ **4** $= (5 \cdot 5 - 5) : 5$ **5** $= 5 \cdot (5 - 5) + 5$ **6** $= (5 \cdot 5 + 5) : 5$ **7** $= 5 + (5 + 5) : 5$	**0** $= (6 + 6) \cdot (6 + 6)$ **1** $= (6 + 6 - 6) : 6$ **2** $= (6 : 6) + (6 : 6)$ **3** $= (6 \cdot 6) : (6 + 6)$ **4** $= 6 - (6 + 6) : 6$ **5** $= (6 \cdot 6 - 6) : 6$ **6** $= 6 - (6 - 6) \cdot 6$ **7** $= (6 \cdot 6 + 6) : 6$ **8** $= 6 + (6 + 6) : 6$
0 $= (8 + 8) \cdot (8 - 8)$ **1** $= (8 + 8 - 8) : 8$ **2** $= 8 : 8 + 8 : 8$ **3** $= (8 + 8 + 8) : 8$ **4** $= (8 \cdot 8) : (8 + 8)$	Für die anderen Zahlen ist der Wert 4 nicht darstellbar. Es gibt nur noch Standardlösungen für **0**, **1**, **2** und **3**, die man z.B. so formulieren kann wie rechts	**0** $= (a - a) \cdot (a - a)$ **1** $= \frac{a + a}{a + a}$ **2** $= \frac{a}{a} + \frac{a}{a}$

	angegeben.	$\mathbf{3} = \frac{a+a+a}{a}$

Nicht gesondert angegeben sind die Darstellungen mit der Zahl 7 sowie mit den Zahlen 9 und ihren Nachfolgern, weil sie z.B. nach dem Schema der unten rechts angegebenen Terme stets darstellbar sind.

d) Aus fünf gleichen Zahlen a kann man immer Terme bilden, die ganzzahlige Werte von 0 bis einschließlich 4 haben, z.B. $\mathbf{0} = (a-a)\cdot(a+a+a)$,
$\mathbf{1} = (a-a)\cdot a + \frac{a}{a}$, $\mathbf{2} = a - a + \frac{a+a}{a}$, $\mathbf{3} = \frac{a+a}{a} + \frac{a}{a}$ und $\mathbf{4} = \frac{a+a+a+a}{a}$.
5 ist die erste Zahl, die sich nur bei speziellen Werten der Zahl a als Term aus fünf gleichen Zahlen darstellen lässt.

Die nächste Tabelle gibt für kleine Zahlen a an, für wie viele von 0 an lückenlos aufeinanderfolgende Zahlen Darstellungen als Term aus fünf gleichen Zahlen a existieren. Die meisten Darstellungen, nämlich 22, sind mit der 4 möglich. Weil Darstellungen für 0 bis 4 immer existieren, ist die Anzahl 5 die Mindestzahl. Ab 16 bleibt es bei der Mindestzahl.

Zahl a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Anzahl	**7**	**11**	**14**	**22**	**13**	**15**	**11**	**13**	**13**	**6**	**7**	5	5	5	**6**	5

Als Beleg wird jeweils ein Term angeführt.

0 = 1 · 1 · 1 · (1 – 1) **1** = 1 · 1 · 1 · 1 · 1 **2** = (1 : 1 + 1 : 1) · 1 **3** = (1 + 1 + 1) + (1 – 1) **4** = (1 + 1 + 1 + 1) : 1 **5** = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 **6** = (1 + 1) · (1 + 1 + 1)	**0** = 2 · 2 · 2 · (2 – 2) **1** = (2 + 2 + 2) : 2 – 2 **2** = (2 + (2 + 2) : 2) – 2 **3** = 2 + (2 · 2) : (2 · 2) **4** = 2 · 2 + (2 – 2) · 2 **5** = 2 · 2 + 2 – 2 : 2 **6** = (2 · 2 – 2 : 2) · 2 **7** = 2 + 2 · 2 + 2 : 2 **8** = (2 + 2) · ((2 + 2) : 2) **9** = ((2 + 2) · 2) + 2 : 2 **10** = 2 + 2 + 2 + 2 + 2	**0** = 3 + 3 + 3 – 3 · 3 **1** = (3 + 3 + 3) : (3 · 3) **2** = 3 + ((3 + 3) : 3) – 3 **3** = (3 · 3 · 3) : (3 · 3) **4** = 3 + 3 + 3 : 3 – 3 **5** = (3 + 3 + 3 · 3) : 3 **6** = 3 + 3 · 3 – (3 + 3) **7** = ((3 + 3) · 3 + 3) : 3 **8** = (3 + 3) : 3 + 3 + 3 **9** = (((3 + 3) : 3) · 3) + 3 **10** = (3 · 3 · 3 + 3) : 3 **11** = (3 + 3 · 3) – 3 : 3 **12** = (3 + 3) · (3 – 3 : 3) **13** = 3 + 3 : 3 + 3 · 3
0 = (4 + 4 + 4) · (4 – 4) **1** = (4 + (4 – 4) · 4) : 4 **2** = ((4 + 4) · 4) : (4 · 4) **3** = (4 + 4) : 4 + 4 : 4 **4** = (4 + 4) : ((4 + 4) : 4) **5** = 4 + 4 : 4 + (4 – 4)	**0** = (5 + 5 + 5) · (5 – 5) **1** = (5 + (5 – 5) · 5) : 5 **2** = ((5 + 5) · 5) : (5 · 5) **3** = (5 + 5 · 5) : (5 + 5) **4** = 5 – 5 + 5 – 5 : 5 **5** = 5 · 5 – 5 · 5 + 5	**0** = (6 + 6 + 6) · (6 – 6) **1** = (6 + 6 · 6) : 6 – 6 **2** = ((6 + 6) · 6) : (6 · 6) **3** = ((6 + 6) : 6) + 6 : 6 **4** = 6 – (6 : 6 + 6 : 6) **5** = 6 + 6 – (6 : 6 + 6)

6 = 4 + 4 : 4 + 4 : 4 **7** = (4 · (4 + 4) – 4) : 4 **8** = (4 · 4 + 4 · 4) : 4 **9** = (4 · 4 + 4) : 4 + 4 **10** = 4 + 4 + (4 + 4) : 4 **11** = 4 + 4 + 4 – 4 : 4 **12** = 4 + 4 + 4 + 4 – 4 **13** = 4 + 4 + 4 + 4 : 4 **14** = 4 · 4 – (4 + 4) : 4 **15** = (4 · 4 · 4 – 4) : 4 **16** = (4 : 4 + 4) · 4 – 4 **17** = (4 + 4 · 4 · 4) : 4 **18** = (4 + 4) : 4 + 4 · 4 **19** = 4 · 4 + 4 – 4 : 4 **20** = 4 · 4 + 4 + (4 – 4) **21** = 4 · 4 + 4 : 4 + 4	**6** = (5 · (5 + (5 : 5))) : 5 **7** = 5 + 5 : 5 + 5 : 5 **8** = 5 + (5 + 5 + 5) : 5 **9** = ((5 + 5) · 5 – 5) : 5 **10** = (5 · 5 + 5 · 5) : 5 **11** = ((5 · 5 + 5) : 5) + 5 **12** = 5 + 5 + (5 + 5) : 5	**6** = 6 + 6 + 6 – 6 – 6 **7** = 6 · (6 + 6 : 6) : 6 **8** = 6 + 6 : 6 + 6 : 6 **9** = 6 + (6 + 6 + 6) : 6 **10** = 6 + 6 – (6 + 6) : 6 **11** = ((6 + 6) · 6 – 6) : 6 **12** = 6 · (6 : 6 + 6 : 6) **13** = (6 + (6 + 6) · 6) : 6 **14** = 6 + 6 + (6 + 6) : 6
0 = (7 + 7 + 7) · (7 – 7) **1** = (7 + 7 · 7) : 7 – 7 **2** = ((7 + 7) · 7) : (7 · 7) **3** = (7 + 7) : 7 + 7 : 7 **4** = (7 · 7 + 7) : (7 + 7) **5** = (7 · 7 – (7 + 7)) : 7 **6** = 7 · (7 – 7 : 7) : 7 **7** = (7 · 7 · 7) : (7 · 7) **8** = (7 · 7) : 7 + 7 : 7 **9** = 7 + 7 : 7 + 7 + 7 : 7 **10** = 7 + (7 + 7 + 7) : 7	**0** = (8 + 8 + 8) · (8 – 8) **1** = (8 + (8 – 8) : 8) : 8 **2** = ((8 + 8) · 8) : (8 · 8) **3** = (8 + 8) : 8 + 8 : 8 **4** = 8 – (8 · 8) : (8 + 8) **5** = 8 – (8 + 8 + 8) : 8 **6** = 8 – (8 : 8 + 8 : 8) **7** = 8 – 8 : 8 + (8 – 8) **8** = 8 – 8 : 8 + 8 : 8 **9** = 8 + 8 : 8 + 8 – 8 **10** = 8 + 8 : 8 + 8 : 8 **11** = 8 + (8 + 8 + 8) : 8 **12** = 8 + ((8 · 8) : (8 + 8))	**0** = (9 – 9) · (9 – 9) · 9 **1** = 9 : 9 + (9 – 9) · 9 **2** = ((9 + 9) : 9) · (9 : 9) **3** = (9 · 9) : (9 + 9 + 9) **4** = (9 + 9 + 9 + 9) : 9 **5** = (9 + 9 · 9) : (9 + 9) **6** = 9 – (9 + 9 + 9) : 9 **7** = 9 – (9 : 9 + 9 : 9) **8** = (9 + 9) – (9 + 9 : 9) **9** = (9 · 9 · 9) : (9 · 9) **10** = 9 : 9 + (9 · 9) : 9 **11** = 9 + 9 : 9 + 9 : 9 **12** = (9 + 9 + 9) : 9 + 9
0 = (10 – 10) · (10 + 10 + 10) **1** = 10 : 10 – 10 · (10 – 10) **2** = (((10 + 10) · 10) : 10) : 10 **3** = (10 + 10) : 10 + 10 : 10 **4** = (10 + 10 + 10 + 10) : 10 **5** = 10 – (10 · 10) : (10 + 10)	**0** = (11 – 11) + (11 – 11) · 11 **1** = (11 + 11) : 11 – 11 : 11 **2** = (11 + 11) : 11 + 11 – 11 **3** = (11 + 11) : 11 + 11 : 11 **4** = (11 + 11 + 11 + 11) : 11 **5** = (11 · 11 – 11) : (11 + 11) **6** = (11 · 11 + 11) : (11 + 11)	**0** = (15 : 15 – 15 : 15) · 15 **1** = 15 : 15 + (15 – 15) · 15 **2** = ((15 : 15) · 15 + 15) : 15 **3** = (15 + 15) : 15 + 15 : 15 **4** = (15 + 15 + 15 + 15) : 15 **5** = (15 · 15) : (15 + 15 + 15)

Verallgemeinerung

Regel:
Durch einen Term aus n gleichen Zahlen a lassen sich die ganzzahligen Werte von 0 bis einschließlich $n-1$ lückenlos darstellen.

Beweis: Für $n \geq 6$ lassen sich die entsprechenden Terme immer nach dem rechts angegebenen Schema formulieren. Die Werte von 0 bis $n-3$ lassen sich als Term direkt darstellen, die dafür nicht benötigten Zahlen a werden durch Multiplikation mit 0 im Term untergebracht. Im Term für $n-2$ werden alle Zahlen a bis auf zwei benötigt, hier stellt man den Wert als $n-3+1$ dar. Im Term für $n-1$ werden alle Zahlen a benötigt.

Darstellungen der Zahlen 0 bis $n-1$ als Term aus n gleichen Zahlen a
$0=(a-a)\cdot(\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n-2})$
$1=\frac{a}{a}+(a-a)\cdot(\underbrace{a+\ldots}_{n-4})$
$2=\frac{a+a}{a}+(a-a)\cdot(\underbrace{a+\ldots}_{n-5})$
$3=\frac{a+a+a}{a}+(a-a)\cdot(\underbrace{a+\ldots}_{n-6})$
$\vdots$
$n-6=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-6}}{a}+(a-a)\cdot(a+\ldots)$
$n-5=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-5}}{a}+(a-a)\cdot(a+a)$
$n-4=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-4}}{a}+(a-a)\cdot a$
$n-3=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-3}}{a}+(a-a)$
$n-2=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-3}}{a}+\frac{a}{a}$
$n-1=\frac{\overbrace{a+a+\ldots+a}^{n-1}}{a}$